5/11/2020
(συνέχεια απόδειξης)

$\forall y \in B(x_0, R+1) \ \forall x \in B(x_0, 1)$

$\Big[\Longrightarrow |x_0 - y| \leq R+1, \quad |x-y| \leq \underbrace{|x_0-y|}_{\leq R+1} + \underbrace{|x-x_0|}_{\leq 1} \leq$

$R+2 \Big]$

Αφού $f \in C(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \in C\,\overline{B}(0, R+2)) \Longleftrightarrow$

f ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{B}(0, R+2) \Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0,1) \ \forall y_1, y_2 \in \overline{B}(0, R+2)$ με
$|y_1 - y_2| < \delta : |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0,1) \ \forall x \in B(x_0, 1) \ \forall y \in \overline{B}(x_0, R+1)$

με $|x - x_0| < \delta : \quad |f(x-y) - f(x_0-y)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0,1) \ \forall \ x \in \overline{B}(x_0, \delta)$
$\forall y \in \overline{B}(x_0, R+1) : |f(x,y) - f(x_0, y)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \overline{B}(x_0, \delta) :$

$\| f(x - \cdot) - f(x_0 - \cdot) \|_{L^\infty(\overline{B}(x_0, R+1))} \leq \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \| f(x - \cdot) - f(x_0 - \cdot) \|_{L^\infty(\overline{B}(x_0, R+1))} = 0$

$\Longrightarrow |v(x) - v(x_0)| \leq \underbrace{\int_{B(x_0, R+1)} |\phi(y)| \cdot dy}_{\underset{< \infty}{(*)}} \underbrace{\| f(x - \cdot) - f(x_0 - \cdot) \|_{L^\infty}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$

(*) $B(x_0, R+1) \subset$
$B(0, R+1+|x_0|)$

$\blacksquare$

Βήμα 2: Έχουμε $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y)\,dy$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$

Θνδο: $u_{x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} =$

$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \cdot \frac{f(x+he_i - y) - f(x-y)}{h}\,dy =$

$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f_{x_i}(x-y)\,dy$

Αρκεί νδο: $\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left[\underbrace{\frac{f(x+he_i - y) - f(x-y)}{h}}_{} - f_{x_i}(x-y) \right] dy \right| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ $\underset{\text{ΘΜΤ}}{=} f_{x_i}(x-y+\theta_i h e_i)$, $\theta_i \in [0,1]$

Επειδή, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$

το f_{x_i} είναι ομοιόμορφα συνεχές σε κάθε συμπαγή μπάλα $\Rightarrow$ [όπως και πριν, δείχνουμε ότι η πιο πάνω έκφραση τείνει στο 0 για $h \to 0$]

$\Rightarrow$ Βρήκαμε ότι $u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \cdot f_{x_i}(x-y)\,dy$, υπάρχει, το οποίο είναι συνεχές ως προς x [αφού $f_{x_i} \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, μετά από πριν] και εφαρμόζοντας ξανά το Βήμα 2, προκύπτει $u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \cdot f_{x_i x_j}(x-y)\,dy$.

συνεχές ως προς x $\forall i,j=1,\dots,n \Rightarrow$

$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ και $\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x f(x-y)dy.$

μένει να δείξουμε ότι αυτό ισούται με $-f(x)$.

[Άσκηση: Δο $\int_{B(0,R)} |\Phi(y)| \cdot dy \leq \begin{cases} c \cdot \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & n=2 \\ c \cdot \varepsilon^2, & n \geq 3 \end{cases}$

«μεθ. κρεμ/ρμ.»

c ανεξάρτητο του $\varepsilon > 0$, αλλά εξαρτάται από τον n].

Άσκηση: Δ.ο. το

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \underbrace{|\Phi(y)|}_{\substack{\| \\ |\tilde{\Phi}(|y|)| \\ |y| = \varepsilon,\ \forall y \in \partial B(0,\varepsilon)}} dS(y) \leq \begin{cases} c \cdot \varepsilon |\ln \varepsilon|, & n=2 \\ c \cdot \varepsilon, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$= \tilde{\Phi}(\varepsilon) \int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1\, dS(y) = \tilde{\Phi}(\varepsilon) \underbrace{|\partial B(0,\varepsilon)|}_{= \dots}$$

Σχόλιο για εξίσωση (15), σελ. 24 Evans:

$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} f(y)dS(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(x) = f(x) \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} 1\, dS(y)}$$

$$= \frac{\partial B(x,\varepsilon)}{\partial B(x,\varepsilon)} = 1.$$

Αρκεί να δείξω:

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} |f(y)-f(x)|\, dS(y) \longrightarrow 0$$

Σχόλιο απόδειξη θεωρ. 3, σελ. 26 Evans:
$u \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

Έστω $\exists\, x \in U : \Delta u(x) \neq 0$, $\Delta u(x) > 0$

$\xRightarrow[\Delta u \in C(U)]{} \exists\, r > 0 : B(x,r) \subset U$ [αφού

U ανοικτό, $x \in U \Rightarrow$ εσωτ. σημείο]
έτσι ώστε $\forall\, y \in \overline{B}(x,r) : \Delta u(y) \geq \min\limits_{y \in B(x,r)} \Delta u > 0$

[λόγω της συνέχειας της $\underbrace{\Delta u}_{=g}$ στο $x \in U$.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall y \in B(x,\delta)$:

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\varepsilon := \frac{|g(x)|}{2} > 0\ \exists\, \delta > 0\ |g(x) - g(y)| < \frac{|g(x)|}{2}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{|g(x)|}{2} - g(x) < -g(y) < \frac{|g(x)|}{2} - g(x)$$

$\Longrightarrow$ ....

(Άσκηση 29/10/2020).
Για ποια $\beta > 0$ ισχύει $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} =: I_\beta < \infty$

$$I_\beta = \underbrace{\int_{\overline{B}(0,1)} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\, dx}_{(*)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\, dx}_{(**)}$$

(*) $\ < \infty$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ [συνεχής επί συμπαγούς]

$$(**) = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)\setminus B(0,1)} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}\, d\lambda$$

οριο/κος γενικευμ. ολοκλ.

$$\underset{\text{μεθ. κρεμ.}}{=} \int_1^R \left(\int_{\partial B(0,r)} \left(\frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} dS(x) \right)\right) dr$$

όπου $\displaystyle\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} dS(x) =$

$$\frac{1}{(1+r^2)^{\beta/2}} \int_{\partial B(0,r)} dS(x) = \frac{1}{(1+r^2)^{\beta/2}} \underbrace{|\partial B(0,r)|}_{= n\alpha(n)\cdot r^{n-1}}$$

και θέλουμε να βρούμε για ποια $\beta > 0$.

$$\exists \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\beta/2}}}_{\leq \frac{r^{n-1}}{r^\beta} = r^{n-1-\beta}} dr < \infty$$

$\Rightarrow \dots$

$$\int_1^R r^{n-1-\beta}\, dr = \frac{1}{n-\beta} r^{n-\beta} \Big|_{r=1}^{r=R} =$$

$$\frac{1}{n-\beta} \big(\underbrace{R^{n-\beta}}_{\to 0 \text{ ανν } n-\beta<0} - 1 \big)$$